

Induzierter technischer Fortschritt

von

MICHAEL BRAULKE und VIKTOR MENSCHOW

Frankfurt/M.

Im 125. Band (Heft 2) dieser Zeitschrift hat *Heinz Holländer* versucht, eine einfache Begründung zur langfristigen Harrod-Neutralität des technischen Fortschritts¹ zu geben und »die komplizierte und sehr formale Darstellung« der Arbeiten von *Samuelson* sowie von *Drandakis* und *Phelps* auf der Basis des Kennedy-Ansatzes »einmal anschaulich und unkompliziert darzulegen«².

Wohl aus Gründen der Vereinfachung macht *Holländer* Lohn und Zins zu exogenen Größen, was dazu führt, daß die Beschreibung der dynamischen Entwicklung seines Systems recht vage³ und das Verständnis des Mechanismus, der zur Harrod-Neutralität führt, kaum erleichtert wird.

Bei näherer Betrachtung zeigt sich auch, daß *Holländer* zur Vereinfachung seiner grafischen Darstellungen einen sehr speziellen Verlauf der *Kennedy-frontier* unterstellt, der analytisch einige Schwierigkeiten bereitet und, wie hier gezeigt werden soll, Ursache für eine zumindest zeitweise unruhige Entwicklung der relevanten wirtschaftlichen Größen sein kann. Wir werden bei unserer Untersuchung einige Elemente einer Beweis-skizze von *Samuelson*⁴ verwenden, obgleich sich der wesentliche Teil seiner Analyse nicht einfach auf den *Holländer*-Fall übertragen läßt. Da der *Samuelson*-Artikel nicht nur sehr karg in seinen Erläuterungen ist, sondern auch noch eine Reihe irreführender Druckfehler enthält, erscheint es uns lohnend, auch den *Samuelsonschen* Ansatz darzulegen.

¹ So der Titel des Aufsatzes.

² *Heinz Holländer*, op. cit., S. 237.

³ Op. cit., S. 241.

⁴ *Paul A. Samuelson*, Rejoinder: Agreements, Disagreements, Doubts, and the Case of Induced Harrod-Neutral Technical Change, *Review of Economics and Statistics*, Vol. XLVIII (Nov. 1966), S. 447f.

1. Die Annahmen

Die Produktionsfunktion laute

$$(1) \quad Y = F(T_N N, T_K K),$$

wobei Y den Output und N und K Arbeit bzw. Kapital (in natürlichen Einheiten gemessen) darstellen. Der technische Fortschritt, der hier rein faktormengenverändernd⁵ sein soll, findet seinen Niederschlag in den Effizienzparametern $T_N(t)$ und $T_K(t)$. F sei linearhomogen mit positiven und abnehmenden Grenzerträgen.

Dividiert man beide Seiten von (1) durch $T_N N$, so erhält man

$$Y/T_N N = F(1, T_K K/T_N N).$$

Schreibt man y für das Pro-Kopf-Produkt Y/N und x für die Kapitalintensität (in Effizienzeinheiten) $T_K K/T_N N$, so ist

$$(2) \quad y = T_N F(1, x) = T_N f(x).$$

Für f sollen neben den schon angedeuteten Eigenschaften

$$f'(x) > 0 \quad \text{und} \quad f''(x) < 0$$

zusätzlich noch die ökonomisch nicht sehr restriktiven *Inada*-Bedingungen

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, & f(\infty) &= \infty \\ \lim_{x \rightarrow +0} f'(x) &= \infty, & \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) &= 0 \end{aligned}$$

gelten. Als letzte Annahme über die Produktionsfunktion soll noch gefordert werden, daß die Substitutionselastizität kleiner als Eins ist, hier also

$$(3) \quad \sigma = - \frac{f'(x) \{f(x) - x f'(x)\}}{x f(x) f''(x)} < 1^6$$

gilt. Diese Annahme bewirkt, daß bei Entlohnung der Faktoren mit ihrem Grenzprodukt die Lohnquote α eine steigende Funktion von x ist, also

$$(4) \quad \alpha = \alpha(x) \quad \text{mit} \quad \alpha'(x) > 0^7.$$

⁵ Wir schreiben hier absichtlich nicht »faktorvermehrend«, weil Situationen denkbar sind, in denen die Effizienzsteigerung des einen Faktors mit einer Effizienzverminderung des anderen gekoppelt ist. Insbesondere bei der Diskussion des *Samuelson*-Ansatzes wird sich zeigen, daß eine Beschränkung auf nicht-negative Effizienzänderungen die einfache Stabilitätsanalyse unmöglich macht.

⁶ Die Ableitung der Formel für σ ist nicht schwierig, aber platzraubend; man findet sie ausführlich z.B. bei *R.G.D. Allen*, *Macro-Economic Theory*, A Mathematical Treatment, London 1968, S. 48.

⁷ $\alpha = \frac{\partial Y}{\partial N} \frac{N}{Y} = \frac{\partial (N T_N f(x))}{\partial N} \frac{N}{N T_N f(x)} = \frac{f(x) - x f'(x)}{f(x)} = \alpha(x)$. Dann ist

Das Arbeitskräftepotential werde immer voll eingesetzt und wachse autonom mit der Rate n , d. h.⁸

$$(5) \quad \hat{N} = n.$$

Die Nettoinvestitionsquote s sei konstant. Dann ist

$$(6) \quad \dot{K} = sY = sT_N N f(x).$$

Für die Effizienzparameter wird nun nicht eine autonome Entwicklung unterstellt, sondern angenommen, daß zu jeder Zeit eine (\hat{T}_K, \hat{T}_N) -Kombination aus einer beschränkten Menge solcher Kombinationen gewählt werden kann, die dann die Richtung des technischen Fortschritts in diesem Zeitpunkt festlegt, also bestimmt, ob der Fortschritt mehr die Effizienz des einen oder des anderen Faktors verändert. Die Menge der effizienten (\hat{T}_K, \hat{T}_N) -Kombinationen bildet die *Kennedy-frontier*. Grundsätzlich sind drei verschiedene Verläufe der *Kennedy-frontier* denkbar, von denen keine aufgrund von a-priori-Überlegungen vorzuziehen ist.

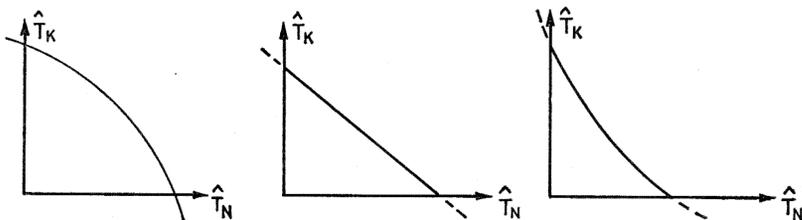


Abb. 1 a — 1 c

Abb. 1 a entspricht dem von *Samuelson* untersuchten Fall und Abb. 1 b dem *Holländer*-Ansatz. Ein Verlauf entsprechend Abb. 1 c führt, wie später noch kurz gezeigt werden soll, zu ähnlichen Ergebnissen wie Fall 1 b. Allgemein kann man für die *Kennedy-frontier*

$$(7) \quad \hat{T}_K = \varphi(\hat{T}_N) \quad \text{mit} \quad \varphi'(\hat{T}_N) < 0$$

schreiben.

Es soll unterstellt werden, daß die Unternehmer jeweils die Fortschrittskombination (\hat{T}_K, \hat{T}_N) wählen, die die Stückkosten am stärksten reduziert. Die Gesamtkostenreduktion R (bei gegebenem Output) setzt

$$\frac{d\alpha}{d\alpha} = \frac{-x f''(x) f(x) - f'(x) [f(x) - x f'(x)]}{f(x)^2} = \frac{-x f''(x)}{f(x)} (1 - \sigma).$$

Wegen $f''(x) < 0$ ist somit $\frac{d\alpha}{d\alpha} > 0$, solange $\sigma < 1$ ist.

⁸ Das Symbol $\hat{}$ bezeichne die relative Wachstumsrate einer Variablen und das Symbol $\dot{}$ die Ableitung nach der Zeit, so daß z. B. $\hat{N} = \dot{N}/N = (dN/dt) \cdot (1/N)$.

sich zusammen aus der mit dem Lohnsatz l gewichteten Anzahl der Arbeitskräfte, die aufgrund der Effizienzsteigerung der Arbeit eingespart werden können ($N \hat{T}_N$), und der mit dem Kapitalzins r gewichteten Menge des einsparbaren Kapitals ($K \hat{T}_K$), also

$$R = l N \hat{T}_N + r K \hat{T}_K.$$

Die Stückkostenreduktion $\varrho = R/Y$ ist dann

$$\varrho = \frac{lN}{Y} \hat{T}_N + \frac{rK}{Y} \hat{T}_K.$$

Wird nun auch noch angenommen, daß die Faktoren mit ihrem jeweiligen Grenzprodukt entlohnt werden, so ist

$$\varrho = \frac{\partial Y}{\partial N} \frac{N}{Y} \hat{T}_N + \frac{\partial Y}{\partial K} \frac{K}{Y} \hat{T}_K,$$

oder

$$(8) \quad \varrho = \alpha \hat{T}_N + (1 - \alpha) \hat{T}_K.$$

2. Die Tendenz zur Harrod-Neutralität bei konkaver Kennedy-frontier (Samuelson-Fall)

Ist die *Kennedy-frontier* streng konkav, wie in Abb. 1a, so gilt als Spezifikation zu (7)

$$(7.1) \quad \varphi''(\hat{T}_N) < 0.$$

Ziel der folgenden Ableitung ist es, ein System von Differentialgleichungen zu finden, das Auskunft über den zeitlichen Verlauf der Variablen x , T_K und T_N gibt.

Setzt man (7) in (8) ein, so ist

$$\varrho = \alpha \hat{T}_N + (1 - \alpha) \varphi(\hat{T}_N).$$

Die stärkste Stückkostenreduktion wird erreicht, wenn

$$\frac{d\varrho}{d\hat{T}_N} = \alpha + (1 - \alpha) \varphi'(\hat{T}_N) = 0,$$

also

$$(9) \quad \varphi'(\hat{T}_N) = -\frac{1 - \alpha}{\alpha}$$

ist. Was Gleichung (9) besagt, läßt sich grafisch sehr einfach veranschaulichen. In Abb. 2 stellen sich gemäß (8) alle (\hat{T}_K, \hat{T}_N) -Kombinationen für eine feste Stückkostenreduktion $\bar{\varrho}$ als Punkte auf der Geraden

$$\hat{T}_K = \frac{\bar{\varrho}}{1 - \alpha} - \frac{\alpha}{1 - \alpha} \hat{T}_N$$

mit der Steigung $-\alpha/(1 - \alpha)$ dar.

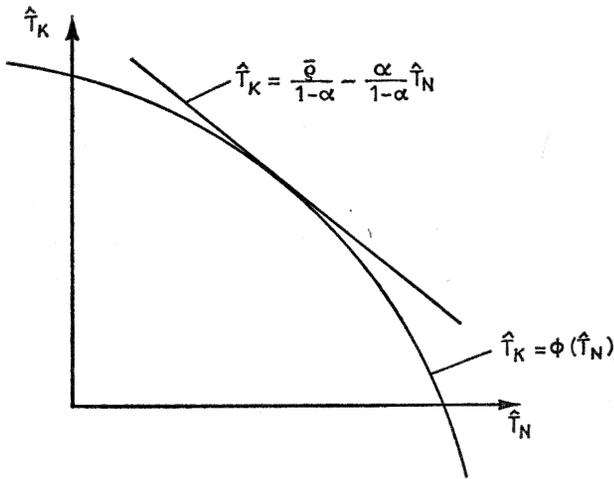


Abb. 2

Die Gerade mit dem größtmöglichen ρ ist dann diejenige, die die *Kennedy-frontier* gerade noch berührt, bei der also $\varphi'(\hat{T}_N) = d\hat{T}_K/d\hat{T}_N = -\alpha/(1-\alpha)$. Mit Hilfe dieser Abbildung kann man auch erkennen, daß mit zunehmender Lohnquote α mehr und mehr solche Verfahren gewählt werden, die in stärkerem Umfang die Arbeitseffizienz steigern.

Gleichung (9) zeigt außerdem, daß das optimale \hat{T}_N nur von α abhängt, das seinerseits (vgl. (4)) eine Funktion von x ist. Folglich kann wegen (7) auch das optimale \hat{T}_K nur von x abhängen:

$$(10) \quad \hat{T}_N = H(x) \quad \text{mit} \quad H'(x) > 0$$

$$(11) \quad \hat{T}_K = M(x) \quad \text{mit} \quad M'(x) < 0^9.$$

Aus der Definition von $x (= T_K K / T_N N)$ folgt

$$(12) \quad \hat{x} = \hat{K} - \hat{N} + \hat{T}_K - \hat{T}_N.$$

⁹ Daß $d\hat{T}_N/dx = H'(x) > 0$ ist, folgt aus Gleichung (9) in Verbindung mit (4). Nach (9) ist $\varphi''(\hat{T}_N) = \frac{d(-\alpha/(1-\alpha))}{d\alpha} \frac{d\alpha}{d\hat{T}_N}$, oder nach einer kleinen

Umformung $\frac{d\hat{T}_N}{d\alpha} = \frac{-1}{(1-\alpha)^2} \frac{1}{\varphi''(\hat{T}_N)} > 0$ wegen (7.1). Folglich ist $H'(x) = \frac{d\hat{T}_N}{dx} = \frac{d\hat{T}_N}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dx} > 0$ wegen (4).

Andererseits ist

$$M'(x) = \frac{d\hat{T}_K}{dx} = \frac{d\hat{T}_K}{d\hat{T}_N} \frac{d\hat{T}_N}{dx} = \varphi'(\hat{T}_N) H'(x) < 0 \quad \text{wegen (7)}.$$

Unter Berücksichtigung von (5), (6), (10) und (11) ist dann

$$(13) \quad \dot{x} = \frac{sT_K f(x)}{x} - n + M(x) - H(x).$$

Wir haben nun ein System von zwei Differentialgleichungen ((11) und (13)) in den Variablen x und T_K , das wir nicht explizit lösen können, für das wir aber zeigen werden, daß es eine stabile Gleichgewichtslösung x^* und T_K^* mit $\dot{x}^* = 0$ und $\dot{T}_K^* = 0$ besitzt. $\dot{T}_K^* = 0$ bedeutet aber nichts anderes als Harrod-Neutralität des technischen Fortschritts¹⁰, so daß mit dem folgenden Schritt zugleich bewiesen ist, daß ein System unter den oben genannten Bedingungen zur Harrod-Neutralität tendiert.

Seien also x^* und T_K^* die Werte von x und T_K , bei denen $\dot{x} = 0$ und $\dot{T}_K = 0$ sind. Dann lassen sich die Bewegungen von x und T_K für kleine Abweichungen von ihren Gleichgewichtswerten durch eine Taylor-Reihenentwicklung approximieren¹¹:

$$(14) \quad \dot{T}_K - \dot{T}_K^* = \{T_K M'(x^*)\} (x - x^*)$$

$$(15) \quad \dot{x} - \dot{x}^* = \{s f(x^*)\} (T_K - T_K^*) + \left\{ [s T_K^* \frac{f'(x^*) x^* - f(x^*)}{(x^*)^2} + M'(x^*) - H'(x^*)] x^* \right\} (x - x^*),$$

oder in Kurzschreibweise

$$(14a) \quad \dot{\xi}_1 = a_{12} \xi_2$$

$$(15a) \quad \dot{\xi}_2 = a_{21} \xi_1 + a_{22} \xi_2,$$

wobei $\xi_1 = T_K - T_K^*$, $\xi_2 = x - x^*$ und a_{12} , a_{21} , a_{22} die entsprechenden Koeffizienten in den geschweiften Klammern sind. Wegen (11) ist $a_{12} < 0$, und wegen (10), (11) und der Tatsache, daß $f(x) > f'(x)x$ für alle x gilt (weil $f(x)$ konkav ist), ist auch $a_{22} < 0$. Offensichtlich ist $a_{21} > 0$. Versucht man den *d'Alembertschen* Ansatz $\xi_i = \xi_i^0 e^{\lambda t}$, $i = 1, 2$, so erhält

¹⁰ Wenn $\dot{T}_K = 0$ ist, bleibt die Kapitaleffizienz im Laufe der Zeit unverändert auf dem Niveau T_K , so daß der technische Fortschritt rein arbeitsvermehrend wirkt. *Uzawa (H. Uzawa, Neutral Inventions and the Stability of Growth Equilibrium, RE Stud., Vol. 23(2), [1961], S. 117-120)* hat nachgewiesen, daß rein arbeitsvermehrender und Harrod-neutraler technischer Fortschritt äquivalent sind.

¹¹ Aus (11) bzw. (13) folgt

$$(i) \quad \dot{T}_K = M(x) T_K \quad \text{und}$$

$$(ii) \quad \dot{x} = s T_K f(x) - [n - M(x) + H(x)] x.$$

Die Taylor-Reihenentwicklung um T_K^* , x^* ergibt

$$(iii) \quad \dot{T}_K - \dot{T}_K^* = M(x^*) (T_K - T_K^*) + T_K^* M'(x^*) (x - x^*) \quad \text{und}$$

$$(iv) \quad \dot{x} - \dot{x}^* = s f(x^*) (T_K - T_K^*) + \{s T_K^* f'(x^*) - [n - M(x^*) + H(x^*) + M'(x^*) - H'(x^*)] x^*\} (x - x^*).$$

Der erste Summand der rechten Seite von (iii) verschwindet, denn $M(x^*) = 0$ wegen $\dot{T}_K^* = T_K^* M(x^*) = 0$ und $T_K^* \neq 0$. Ersetzt man in (iv) $n - M(x^*) + H(x^*)$ durch $s T_K^* f(x^*) / x^*$, was wegen $\dot{x}^* = 0$ erlaubt ist, so erhält man nach geringfügiger Umformung (15).

man durch Einsetzen in (14a) und (15a), indem man nach λ auflöst,

$$\lambda_{1/2} = \frac{a_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{a_{22}^2}{4} + a_{12} a_{21}}.$$

Aus $a_{22} < 0$ und $a_{12}a_{21} < 0$ folgt, daß der Realteil von λ immer negativ ist, was nichts anderes besagt, als daß ξ_1 und ξ_2 , also die Abweichungen der Variablen T_K und x von ihren Gleichgewichtswerten T_K^* und x^* , gegen Null streben.

Mit diesem Beweis wird lediglich die *lokale* Stabilität des Gleichgewichts nachgewiesen, also nur gezeigt, daß das System von allen Werten, die nahe bei den Gleichgewichtswerten T_K^* und x^* liegen, zu diesen Werten hin tendiert. Bevor wir uns mit der Frage der *globalen* Stabilität beschäftigen, wollen wir noch kurz die Eigenschaften des Gleichgewichts untersuchen. Dort ist $\hat{T}_K^* = 0$ und \hat{T}_N^* nimmt somit den Wert an, der durch den Schnittpunkt der *Kennedy-frontier* mit der \hat{T}_N -Achse bestimmt wird. Die Steigung der *Kennedy-frontier* in diesem Punkt determiniert die gleichgewichtige Lohnquote α^* . Nach (9) ist nämlich $\varphi'(\hat{T}_N^*) = -\alpha^*/(1 - \alpha^*)$, und das bedeutet, daß α^* um so größer ist, je steiler die *Kennedy-frontier* die \hat{T}_N -Achse schneidet. Anhand Gleichung (2) läßt sich ferner erkennen, daß das Pro-Kopf-Einkommen y im Gleichgewicht wegen $x(t) = x^*$ genauso schnell wie $T_N(t)$ wächst, also mit der Rate \hat{T}_N^* . Entsprechend wächst dann das Sozialprodukt Y mit der Rate $\hat{T}_N^* + n$.

Die Annahmen über die Gestalt der Produktionsfunktion, insbesondere die *Inada*-Bedingungen, sowie die Forderung, daß die Substitutionselastizität kleiner als 1 ist, erlauben auch einen Nachweis der *globalen* Tendenz des Systems zum Gleichgewicht. Wir wollen diesen Beweis jedoch nicht exakt führen, sondern in heuristischer Manier nur den Mechanismus zeigen, der das System zum Gleichgewicht führt. Wir gehen dabei in zwei Schritten vor, indem wir im ersten mit Hilfe der klassischen *Solow*-Analyse nachweisen, daß $x(t)$ immer einem noch zu definierenden Wert $\bar{x}(t)$ folgt, und im zweiten Schritt zeigen, daß $\bar{x}(t)$ gegen x^* strebt.

1. Eine unwesentliche Umformung von Gleichung (13) ergibt

$$(13.1) \quad \dot{x}(t) = s T_K(t) f(x(t)) - \{n + \hat{T}_N(t) - \hat{T}_K(t)\} x(t).$$

Der Ausdruck in der geschweiften Klammer ist sehr unhandlich, weil er wegen (10) und (11) selbst noch von $x(t)$ abhängt. Statt des wahren $\dot{x}(t)$ gemäß (13.1) wollen wir deshalb die fiktive Wachstumsrate $\dot{\tilde{x}}(t)$ betrachten, die durch

$$(13.2) \quad \dot{\tilde{x}}(t) = s T_K(t) f(x(t)) - \{n + \hat{T}_N^*\} x(t)$$

definiert ist. Bezeichnen wir den Wert von x , bei dem $\dot{\tilde{x}} = 0$ ist, mit $\bar{x}(t)$, so läßt sich leicht einsehen, daß $x(t)$ bei Zugrundelegung der Wachstumsrate $\dot{\tilde{x}}$ immer dem Wert $\bar{x}(t)$ folgt. Abb. 3 soll dies verdeutlichen.

Die Funktion $s T_K(t) f(x)$ hat wegen der Annahmen über die Produktionsfunktion grundsätzlich die in Abb. 3 gezeichnete Gestalt, so

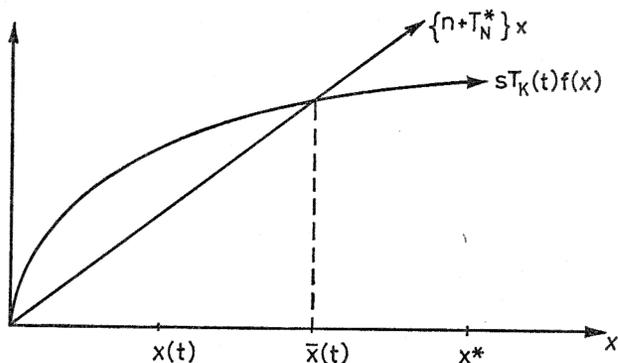


Abb. 3

daß ein Schnittpunkt mit der Geraden $\{n + \hat{T}_N^*\}x$ immer existiert. Gleichung (13.2) in Verbindung mit Abb. 3 zeigt, daß

$$\dot{\hat{x}} \cong 0 \text{ wenn } x(t) \cong \bar{x}(t).$$

$x(t)$ strebt also immer gegen $\bar{x}(t)$.

- Wir betrachten im Folgenden nur Ausgangssituationen $x(t)$ mit $x(t) < x^*$, weil sich die gesamte Argumentation ohne Schwierigkeiten für den Fall $x(t) > x^*$ umkehren läßt. Ist also $x(t) < x^*$, so ist wegen (11) $\hat{T}_K(t) > \hat{T}_K^* = 0$, so daß die Funktion $sT_K(t)f(x)$ wegen wachsendem T_K nach oben verschoben wird. Abb. 3 zeigt, daß damit zugleich $\bar{x}(t)$ nach rechts rückt. Und da $\hat{T}_K(t) > 0$ bleibt, solange $x(t) < x^*$ ist, muß sich $\bar{x}(t)$ dem Wert x^* nähern.

Wir haben bisher bei der Bewegung von $x(t)$ Gleichung (13.2) zugrunde gelegt. Ein Vergleich mit (13.1) zeigt, daß die wahre Wachstumsrate $\dot{x}(t)$ für alle $x(t) < x^*$ in Wirklichkeit noch größer als $\dot{\hat{x}}(t)$ ist. Wegen $x(t) < x^*$ gilt nämlich $\hat{T}_N(t) < \hat{T}_N^*$ und $\hat{T}_K(t) > \hat{T}_K^* = 0$, was direkt aus (10) und (11) folgt.

Die Annäherung von $x(t)$ und $\bar{x}(t)$ an den Gleichgewichtswert x^* muß nicht monoton verlaufen. Vielmehr ist es möglich, daß $x(t)$ in der Anfangsphase für eine gewisse Zeit sogar von x^* wegstrebt oder daß es im späteren Verlauf um x^* schwankt.

3. Der technische Fortschritt bei linearer Kennedy-frontier

Bei der Untersuchung des Falles einer linearen *Kennedy-frontier* wird sich herausstellen, daß das Ergebnis sehr wesentlich davon abhängt, ob die *Kennedy-frontier* über den positiven Quadranten hinausragt oder ob sie gerade nur bis zur \hat{T}_N - und \hat{T}_K -Achse reicht, was dem in Abb. 1b dargestellten (durchgezogene Linie) und damit genau dem von *Holländer* angenommenen Verlauf entspricht. Wir wollen zunächst diesen Fall untersuchen.

3.1 Der Holländer-Fall

Im Fall der linearen und nur bis zu den Achsenabschnitten reichenden *Kennedy-frontier* gilt als Spezifikation zu (7)

$$(7.2) \quad \hat{T}_K = a - b\hat{T}_N \quad \text{mit} \quad \hat{T}_K, \hat{T}_N \geq 0 \quad \text{und} \quad a, b = \text{const.} > 0.$$

Setzt man (7.2) in Gleichung (8) ein, so erhält man für die Stückkostenreduktion

$$(16) \quad \varrho = (\alpha - (1 - \alpha)b)\hat{T}_N + (1 - \alpha)a.$$

Das Maximierungsproblem lautet nun:

$$\max \varrho!$$

unter der Nebenbedingung

$$0 \leq \hat{T}_N \leq a/b.$$

Es ist unmittelbar einleuchtend und grafisch leicht zu veranschaulichen, daß die Stückkostenreduktion dann maximiert wird, wenn

$$(17) \quad \hat{T}_N = \begin{cases} \frac{a}{b} \\ 0 \end{cases} \quad \text{für} \quad \alpha - (1 - \alpha)b \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases} \quad \text{oder} \quad \alpha \begin{cases} > \frac{b}{1+b} \\ < \frac{b}{1+b} \end{cases}.$$

Definieren wir $\hat{\alpha} = \frac{b}{1+b}$ und ist $\alpha = \hat{\alpha}$, so wird ϱ durch jede zugelassene (\hat{T}_K, \hat{T}_N) -Kombination maximiert. Für $\alpha = \hat{\alpha}$ sind also \hat{T}_K und \hat{T}_N unbestimmt. Um diese Unbestimmtheit zu eliminieren, nehmen wir willkürlich¹² an, daß für $\alpha = \hat{\alpha}$ der Punkt $(\hat{T}_N, \hat{T}_K) = (0, a)$ der *Kennedy-frontier* gewählt wird. Bei jeder Lohnquote $\alpha > \hat{\alpha}$ wird also ausschließlich arbeitsvermehrender, bei jeder Lohnquote $\alpha \leq \hat{\alpha}$ ausschließlich kapitalvermehrender Fortschritt realisiert.

Dem kritischen Wert $\hat{\alpha}$ entspricht eindeutig ein Wert \hat{x} , da α eine monoton steigende Funktion von x ist (vgl. (4)).

Wenn gezeigt werden kann, daß unabhängig von der Ausgangssituation jedes System unter den hier gezeigten Annahmen schließlich x -Werte annimmt, die größer als \hat{x} sind, und daß es dann den Bereich $x > \hat{x}$ nicht mehr verläßt, so ist die Tendenz zur Harrod-Neutralität auch für den *Holländer-Fall* bewiesen, da bei $x > \hat{x}$ immer $\alpha > \hat{\alpha}$ gilt und somit $\hat{T}_K = 0$ sein muß.

¹² Es würde für die nachfolgenden Betrachtungen genügen, $\hat{T}_K(\hat{\alpha})$ irgendeinen Wert c im Intervall $0 < c \leq a$ zuzuordnen. $\hat{T}_K(\hat{\alpha}) = a$ wurde hauptsächlich zur Vereinfachung der Schreibweise gewählt. Der von uns ausgeklammerte Sonderfall $\hat{T}_K(\hat{\alpha}) = 0$ könnte dazu führen, daß das System gegen den unten definierten Wert \hat{x} konvergiert. Das Ergebnis würde dadurch nicht beeinträchtigt, da auch in diesem Falle $\hat{T}_K^* = \hat{T}_K(\hat{\alpha}) = 0$ und Harrod-Neutralität für den Endzustand gesichert wäre.

Für die folgende Betrachtung ist es zweckmäßig, die Zeit als diskrete Variable einzuführen. Statt der Ableitungen der Variablen (z. B. x) nach der Zeit betrachten wir deren Zuwachs $x(t + 1) - x(t)$ in einer Periode und bezeichnen ihn mit $Dx(t)$. Die Größen \hat{T}_K, \hat{x} usw. sind dementsprechend als Zuwachsraten, z. B. $\hat{x}(t) = (x(t + 1) - x(t))/x(t)$, zu interpretieren. Eine solche Modifikation ist sachlich sicher gerechtfertigt, da die Reaktionsgeschwindigkeit i. a. nicht unendlich groß ist. Solange die Wachstumsraten klein gegenüber den absoluten Werten der Variablen sind, so daß man Glieder höherer als erster Ordnung in D vernachlässigen kann, bleiben unter dem Operator D die Regeln der Differentialrechnung unverändert. Die zu (10), (11) und (13) analogen Differenzgleichungen lauten

$$\begin{aligned}
 (10' \text{ a}) \quad DT_N &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{b} T_N \\ 0 \end{array} \right\} && \text{für } x \left\{ \begin{array}{l} > \hat{x} \\ \leq \hat{x} \end{array} \right\}, \\
 (10' \text{ b}) & && \\
 (11' \text{ a}) \quad DT_K &= \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ aT_K \end{array} \right\} && \text{für } x \left\{ \begin{array}{l} > \hat{x} \\ \leq \hat{x} \end{array} \right\} \text{ und} \\
 (11' \text{ b}) & && \\
 (13' \text{ a}) \quad Dx &= \left\{ \begin{array}{l} sT_K f(x) - \left(n + \frac{a}{b}\right) x \\ sT_K f(x) - (n - a) x \end{array} \right\} && \text{für } x \left\{ \begin{array}{l} > \hat{x} \\ \leq \hat{x} \end{array} \right\}. \\
 (13' \text{ b}) & &&
 \end{aligned}$$

Wir bezeichnen mit $\bar{x}(t)$ bzw. $\bar{\bar{x}}(t)$ die »stationären« Werte von x , bei denen Dx nach (13' a) bzw. (13' b) gerade verschwindet.

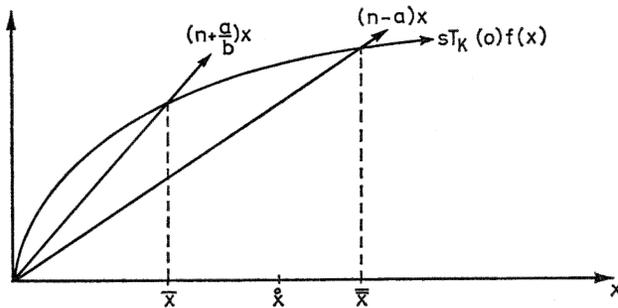


Abb. 4

Abbildung 4 oder auch die dieser Abbildung zugrunde liegenden Gleichungen (13' a) und (13' b) für $Dx = 0$ zeigen, daß $\bar{\bar{x}}(t)$ immer größer $\bar{x}(t)$ ist. Ferner läßt sich daraus analog zur Analyse im vorigen Abschnitt erkennen, daß $x(t)$ jeweils einem der beiden Zielwerte $\bar{x}(t)$ oder $\bar{\bar{x}}(t)$ folgt, nämlich dem Wert $\bar{\bar{x}}(t)$, wenn $x(t) \leq \hat{x}$ ist, oder $\bar{x}(t)$, wenn $x(t) > \hat{x}$ ist.

Die Tendenz zur Harrod-Neutralität ist bewiesen, wenn gezeigt werden kann, daß der kleinere Zielwert $\bar{x}(t)$ von jeder beliebigen Ausgangslage $x(o)$, $\bar{x}(o)$, $\bar{\bar{x}}(o)$ aus schließlich über \hat{x} hinauswächst und im Bereich $x > \hat{x}$ bleibt.

Wir behaupten also

1. $D\bar{x}(t) \geq 0$ für alle t ¹³.
2. Es existiert ein t^* , so daß $\bar{x}(t) > \hat{x}$ für alle $t \geq t^*$ ist.

Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus der Definitionsgleichung für $\bar{x} : s T_K f(\bar{x}) = \left(n + \frac{a}{b}\right) \bar{x}$. Daraus folgt

$$(18) \quad D\bar{x}(t) = \frac{s f(\bar{x}(t))}{n + \frac{a}{b} - s T_K(t) f'(\bar{x}(t))} D T_K(t).$$

Da Zähler und Nenner¹⁴ des Bruches stets positiv sind, wandert \bar{x} nach rechts, wenn $D T_K > 0$, d. h. (nach (11' b)), solange $x \leq \hat{x}$ ist, und bleibt unverändert (gemäß (11' a)), wenn $x > \hat{x}$ ist.

Zum Beweis der zweiten Behauptung gehen wir von der in Abb. 4 angegebenen Anfangsposition, also $\bar{x}(o) < \hat{x} < \bar{\bar{x}}(o)$ aus¹⁵.

Wir zeigen zunächst, daß \bar{x} jede Schranke $\delta < \hat{x}$ übersteigt. Sei $\delta = \bar{x}(t^{**})$; wir unterscheiden zwei Fälle

- a) $x(t^{**}) \leq \hat{x}$. Dann ist $D T_K(t^{**}) > 0$ und $\bar{x}(t^{**} + 1) > \delta$.
- b) $x(t^{**}) > \hat{x}$. Dann strebt x gemäß (13' a) gegen \bar{x} und erreicht nach endlich vielen Perioden¹⁶ wieder den Bereich $x \leq \hat{x}$, und es gilt das gleiche wie unter a).

Wenn \bar{x} den Bereich $\bar{x} > \hat{x}$ entgegen der Behauptung 2 nie erreichen würde, müßte demnach \bar{x} dem Wert \hat{x} asymptotisch von links zustreben. Notwendig dazu wäre $\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ t \in \Omega}} D\bar{x}(t) = 0$, wobei $\Omega = \{t \mid x(t) \leq \hat{x}\}$.

¹³ Der Beweis für $D\bar{x}(t) \geq 0$ ist völlig analog.

¹⁴ $n + \frac{a}{b} - s T_K(t) f'(\bar{x}(t)) > n + \frac{a}{b} - s T_K(t) \frac{f(\bar{x}(t))}{\bar{x}(t)} = 0$,

da $f'(\bar{x}(t)) < \frac{f(\bar{x}(t))}{\bar{x}(t)}$ wegen der Konkavität von $f(x)$ ist.

¹⁵ Die Fälle $\bar{\bar{x}}(o) \leq \hat{x}$ und $\bar{\bar{x}}(o) = \hat{x}$ lassen sich analog zum folgenden beweisen, im übrigbleibenden Fall $\bar{\bar{x}}(o) > \hat{x}$ ist die Behauptung bereits erfüllt.

¹⁶ Die Abnahme $D x(t)$ ist für alle $x(t) > \hat{x}$ nach unten beschränkt:

$$\begin{aligned} |D x(t)| &= \left(n + \frac{a}{b}\right) \cdot x(t) - s \cdot T_K(t) \cdot f(x(t)) \\ &> \left(n + \frac{a}{b}\right) \cdot \hat{x} - s \cdot T_K(t) \cdot f(\hat{x}) > \left(n + \frac{a}{b}\right) \cdot \bar{x} - s \cdot T_K(t) f(\bar{x}) = 0. \end{aligned}$$

Die Ungleichheitsrelationen folgen wiederum aus der Konkavität von $f(x)$ und der Voraussetzung $\bar{x}(t) < \hat{x} < x(t)$.

Der Zuwachs $D\bar{x}(t)$ ist aber für alle Perioden, in denen $x(t) \leq \hat{x}$ ist, nach unten beschränkt, da

$$D\bar{x}(t) = \frac{s f(\bar{x}(t))}{n + \frac{a}{b} - s T_K(t) f'(\bar{x}(t))} D T_K(t) \geq \frac{s f(\bar{x}(0))}{n + \frac{a}{b}} a T_K(0) > 0 \text{ ist.}$$

Von der Anfangslage von $x(0)$, $\bar{x}(0)$ und $\bar{\bar{x}}(0)$ hängt es ab, ob der Anpassungsprozeß an den endgültigen Gleichgewichtswert $\bar{x} > \hat{x}$ sofort oder erst nach mehrmaligem Richtungswechsel von x einsetzt.

Der technische Fortschritt führt also auch im *Holländer-Fall* letztlich zur Harrod-Neutralität. Es besteht dabei aber durchaus die Möglichkeit, daß das System über längere Zeit hinweg zwischen rein arbeits- und rein kapitalvermehrendem Fortschritt schwankt und dieses Schwanken erst aufhört, wenn die Effizienz des Faktors Kapital T_K genügend groß geworden ist, so daß $\bar{x} > \hat{x}$ ist.

3.2 Der technische Fortschritt bei linearer und über die Achsenabschnitte hinausreichender Kennedy-frontier

Da die Effizienzparameter T_K und T_N negativ würden, wenn man für die *Kennedy-frontier* Werte kleiner -1 zuließe, kann die *frontier* nicht beliebig weit in den 2. und 4. Quadranten hineinragen.

Die Spezifikation zu (7) lautet jetzt

(7.3) $\hat{T}_K = a - b\hat{T}_N$ mit
 $o_K \geq \hat{T}_K \geq -u_K, o_N \geq \hat{T}_N \geq -u_N, 1 > u_K, u_N > 0$ und const.,
 $o_K, o_N, a, b > 0$ und const.

Die Maximierung von ρ unter der Nebenbedingung (7.3) führt zu

(10'' a) $DT_N = \begin{cases} o_N T_N \\ -u_N T_N \end{cases}$ für $x \begin{cases} > \hat{x} \\ \leq \hat{x} \end{cases}$,
(10'' b) $DT_N = \begin{cases} o_N T_N \\ -u_N T_N \end{cases}$
(11'' a) $DT_K = \begin{cases} -u_K T_K \\ o_K T_K \end{cases}$ für $x \begin{cases} > \hat{x} \\ \leq \hat{x} \end{cases}$ und
(11'' b) $DT_K = \begin{cases} -u_K T_K \\ o_K T_K \end{cases}$
(13'' a) $Dx = \begin{cases} s T_K f(x) - (n + u_K + o_N) x \\ s T_K f(x) - (n - u_N - o_K) x \end{cases}$ für $x \begin{cases} > \hat{x} \\ \leq \hat{x} \end{cases}$.
(13'' b) $Dx = \begin{cases} s T_K f(x) - (n + u_K + o_N) x \\ s T_K f(x) - (n - u_N - o_K) x \end{cases}$

Konstruiert man analog zum vorhergehenden Abschnitt wieder die beiden Zielwerte \bar{x} und $\bar{\bar{x}}$, so läßt sich aufgrund von (10''), (11'') und (13'') der Bewegungsablauf des Systems ähnlich wie in Abschn. 3.1 ermitteln. Zu beachten ist jedoch ein bedeutsamer Unterschied gegenüber dem Gleichungssystem (10'), (11') und (13'): für den linken Zielpunkt \bar{x} gilt nicht mehr $D\bar{x}(t) \geq 0$ für alle t , sondern er wandert nach links, sobald $x > \hat{x}$ ist, da in diesem Bereich $D T_K(t) = -u_K T_K(t) < 0$ ist.

Die Kapitalintensität x (ebenso wie \bar{x}) wird sich daher i. a. von einer beliebigen Ausgangslage dem Wert \hat{x} nähern und für alle weitere Zeit in einem gewissen Bereich um \hat{x} schwanken.

Das System findet in diesem Fall also nicht zur Harrod-Neutralität, sondern pendelt schließlich ständig zwischen stark die Arbeitseffizienz erhöhendem und die Kapitaleffizienz verringerndem Fortschritt und dem umgekehrten Fall.

Abschließende Bemerkungen

Wie schon zu Beginn dieser Arbeit angedeutet, läßt sich der Fall einer konvexen *Kennedy-frontier* analog dem linearen Fall behandeln, weil die Maximierung der Zielfunktion (8) immer zur Realisierung eines der beiden Endpunkte der *frontier* führt.

Zum Schluß wollen wir noch darauf hinweisen, daß die Annahme einer zeitinvarianten *Kennedy-frontier* – φ hängt nicht explizit von t ab – unter ökonomischen Gesichtspunkten umstritten ist. Verschiedene Argumente sprechen dafür und dagegen. Wir verweisen deshalb auf die entsprechenden Ausführungen bei *Samuelson* und bei *Holländer*.

Die zweite Annahme, nämlich $0 < \sigma < 1$, von der die Resultate dieser Arbeit ganz wesentlich abhängen, scheint aufgrund der bisher bekannten empirischen Untersuchungen durchaus realistisch zu sein. Man darf aber nicht vergessen, daß auch die Beweise, die von einer anderen Zielfunktion ausgehen¹⁷, mit dieser Annahme stehen und fallen.

Summary

We have tried to give a more detailed analysis of induced technical progress along the familiar Kennedy-Weizsäcker-line. Our main purpose is to show that the long-run behavior of an economy varies with the domain and curvature assumptions of the Kennedy-frontier. At first, for the sake of completeness, *Samuelson's* proof, which draws heavily upon the strict concavity of the Kennedy-frontier, is recited. In the second section a linear Kennedy-frontier bounded by the positive axes is assumed. The tendency towards Harrod-neutrality still applies, though intermediate fluctuations are possible. Abandoning the positivity assumption of the Kennedy-frontier we show that there may be no Harrod-neutrality-trend at all. In the concluding section we explain heuristically that the argument presented covers as well the case of a strictly convex Kennedy-frontier.

¹⁷ *Holländer* unterstellt beispielsweise Gewinnmaximierung. Die von *Samuelson* gesetzte Zielfunktion, die auch hier in (8) verwendet wurde, ist letztlich gleichbedeutend mit der Annahme, daß die Wachstumsrate des Sozialprodukts maximiert werden soll. Würde man unterstellen, daß nicht die Gewinne, sondern die Gewinnquote maximiert wird, so würde die Annahme $\sigma < 1$ bereits bewirken, daß immer die Fortschrittskombination gewählt wird, die die Arbeitseffizienz am stärksten steigert.